Милан ТАСИЋ

УЗ *МАТЕМАТИЧКЕ РУКОПИСЕ* КАРЛА МАРКСА

Синтагму „математички рукописи“ употребио је Енгелс 1885 године, пишући у другом издању дела *Анти-Диринг* о своме раду на једној другој књизи, на *Дијалектици природе:* „можда ће ми се касније пружити прилика да добијене резултате, каже он, сакупим и средим, заједно с врло важним математичким рукописима осталим иза Маркса“[1]). Истим је речима потом насловљен и сам део[2]) поменуте заоставштине, онда када је године 1968 по први пут штампан у Москви — поделивши тако, у погледу обављивања, судбину оних других списа класика марксизма да угледају светло дана далеко иза времена у коме су настали.

Ваља одмах рећи да дело које је пред нама[3]), не доноси у некој високо-критички промишљеној мери сав рефлекс материјалистичко-дијалектичке Марксове мисли у сфери математичких садржаја, нити је изворан увид у генезу, структуру и кретање математичких појмова, или пак целовит и образложен пројекат неког будућег мишљења у овој егзактној области. Јер, имајући карактер конспекта оних уџбеника и делова књига које би прочитао, или пак записа (и скица) наслова, као литературе о појединим проблемима, дакле нечега што би аутору тек требало да послужи, овај рукописни материјал то не може ни представљати, али је изван сваке сумње да Марксов допринос проблематици заснивања анализе (диференцијалног и интегралног рачуна) треба тражити управо у оном малом броју (од две десетине) оригиналних страница овога дела, као што не треба губити из вида и да је за укупан третман појмова: број, једнакост, променљива и др. еминентно релевантна и његова економска теорија.

---

1) Фридрих Енгелс: *Анти-Диринг,* „Култура“ 1964., Београд 14.

2) Од око укупно 900 рукописних страница, колико их се чува у *Институту Маркса и Енгелса,* немачко издање, па дакле и српскохрватски превод, обухвата само стотину штампаних.

3) Karl Marks: *Matematički rukopisi* (prev. s nem.), „Stvarnost“, Zagreb, 1978.

Стога ћемо, на овом месту, препоручити вашој пажњи један сумаран осврт управо на ту тему, иначе крајње ретко заступану у нашој, једнако и страној литератури, тему која би могла имати наслов: „Маркс и диференцијални рачун".

Да упозна овај рачун, Марксу су послужили уџбеници Бушарле (Boucharlat), Хајнда (Hind) и Хола (Hall), али ће готово од самог почетка постати специфичним предметот његовог интереса тзв. „Лагранжов (Lagrange) доказ Тајлорове (Tayhor) теореме на чисто алгебарској основи", што би овде била реч, у ствари, о посебном, „лагранжовском" заснивању диференцијалног рачуна, будући да се поменута теорема налази у основи овсг рачуна. Наиме, управо ће сама та критика Лагранжових поступака у заснивању анализе, омогућити Марксу довољно простора за елаборацију властитог методолошког приступа помснутим питањима, чије би битне ознаке-захтеви били: бити конструктиван, бити генетички, дијалектички. Маркс је, наиме, веровао да се чворни проблеми из основа једне науке разрешавају већ самим образлагањем дијалектике стварања и кретање њених базичних појмова и метода и да изван тога не остаје ништа. Стога ће паралела алгебра — диференцијални рачун, овде бити најмање случајна, тачно је пак управо то да је дијалектички прелаз (развој) првог члана поменуте дијаде у други члан, Марксово решење проблема заснивања анализе.

Ближе говорећи, „стварност бесконачног", анализу не карактеришу многи појмови, правила и закони, који иначе поседују пуни смисао у области коначних величина — алгебри, или ће различити покушаји „помирења" коначног и бесконачног (укључујући ту и онај Њутна, Лајбница и др.), ниже и више математике (што је, узгред буди речено, отворен проблем и данас) бити за класике марксизма незадовољавајући[4]). Јер док је поузданошћу и сигурношћу резултата, математика вековима одолевала подозривости сваке врсте, с новооткривеним рачуном инфинитезимала, у којем стичу легитимитет такви појмови попут „бесконачно мала величина бесконачно мале величине („infinitezimila infinitezimale"), или закони како што је: бесконачна сума infinitezimala (као, дакле, коначних вредности) (код развијања функција у ред) је коначна величина, губе сва-

---

[4]) Против сваке мистификације „бесконачно малих величина", Енгелс ће морати, рецимо, о томе писати: „Мистерија којом су још и данас обавијени... диференцијали и бесконачно мале величине различитог степена, најбољи је доказ за то да се још увек замишља као да је овде реч о чистим, „слободним творевинама и имагинацијама" људског духа, којима ништа не одговара у објективном свету. Па ипак... за све ове замишљене величине налазимо у природи реалне примере.

С ... молекулима, поступа природа на сасвим исти начин и по сасвим истим законима, као што математика оперише својим апстрактним диференцијалима". Итд. (Енгелс: *Дијалектика природе,* „Култура". Београд 1970, 303—304.

ку очигледност и интуитивну јасност, и само би, будући недовољно рационално промишљени (основани), по речима класика марксизма, „наливали воду на млин" сваковрсних идеализама[5]). А већ су првични појмови *флуксије* (брзине) и *флуента* (променљиве), оснивача рачуна Њутна, у чијим се терминима износило и све друго, као чисто механички појмови, били на одређени начин нејасни, затамљени. Зато је, бесумње, првобитне појмове и противуречности овог рачуна требало расветлити изнутра, „локализовати" их већ у алгебри и даље (још ниже) од тога; у обичној свакодневној пракси, па потом проследити њихов дијалектички раст и прелаз у сфери бескрајног.

Размотримо сада изблиза, следећи Марксове забелешке, његов увид у настанак диференцијалног рачуна, који је овоме аутору омогућио да кроз историју разликује *мистични* (Њутна и Лајбница), *рационалан* (Даламбера и Ојлера) и *алгебарски диференцијални рачун* (Лагранжа).

У првом случају, Маркс овим речима почиње скицу Њутновог открића: „The velocitas or fluxions (брзине или флуксије) нпр. *варијабила* x, y итд. *означене су помоћу* $\dot{x}$, $\dot{y}$ итд; нпр.; ако су y и x *connected quantities (fluents) generated by continuous movement* [зависне величине (флуенти) произведене непрекидним кретањем] $\dot{u}$ и $\dot{y}$ означавају стопе of their increase [њихова раста], те је стога $\dot{u}/\dot{y}$ omjer rates [стопе] у којима су њихови incriments generated [прирасти произведени]"[6]). Напустићемо на овом месту овај особен начин изражавања да би у нешто савременијим терминима изложили оно што је, по Марксу суштински заједничко Лајбницовом и Њутновом приступу. У случају функције $y = x^2$, добије ли променљива x прираст dx, y се увећа (смањи) за

$$(x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2. \qquad (*)$$

Десној страни овог израза припада тзв. „функција-извод" величина 2x и једино је проблем како да ова буде издвојена, Њутн и Лајбниц то чине, најпре, *изједначавајући с нулом* вредност *dx* у *(dx)²*, а потом, делећи леву страну у (*) с *различитим од нуле) (dx)*. Тако, коначно настаје

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (\text{с } dy \text{ као левом страном у } (*))$$

али је бесумње ова „двострука" и противуречна улога величине *dx*, као и она сама, остала прекривена велом мистерије за пионире диференцијалног рачуна. Додајмо: утолико више (о

---

[5]) Такав један чувени подухват да с аргументима ове врсте одбрани религију, подузео је филозоф Беркли (Berkeley), чему овде не може бити речи.

[6]) Matematički rukopisi, 121.

чему Маркс не говори) јер је овде начињена погрешка изједначавања прираштаја функције Δy у тачки x, с прираштајем тангенте (диференцијалом) dx у истој тачки, али се с прецртавањем величине $(dx)^2$ елинимише и сама та погрешност.

Кад је пак реч о Даламберовом доприносу заснивања диференцијалног рачуна, он се по Марксу састоји у следећем: Даламбер, означивши с Δx, односно Δy, ма како мале (но различите од нуле) прираштаје променљиве x и функције y респективно, располаже оправданом могућношћу да, рецимо у случају функције $f(x) = x^3$, добије

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

а одатле и, стављањем, но (реално!) тек на десној страни израза $\Delta x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Притом, вели Маркс, на крају процеса као што се види (а не на самом почетку његовом, као код Њутна и Лајбница) долази величина dy/dx и овде само уместо односа 0/0 који је бесмислен, а да управо као симбол *упути* на властити процес настанка, који је, у ствари, процес диференцирања функције, тачније, „самоослобађања” његог извода на приказани начин. Стога ће Марксу моћи да каже да је „Даламбер, ослободивши диференцијални рачун његове мистичне одеће, учинио енорман корак напред”[7]).

У случају пак диференцијалног рачуна, Марксом означеним као „чисто алгебарским”, и који се везује за име математичара Лагранжа, већ смо упутили да је Марксу првенствено из „дијалектичких побуда“ послужио његов рад на алгебарском заснивању овог рачуна. Да „бесконачна“ анализа (чији је централни део диференцијални и интегрални рачун) као математичка грана, није у односу на „коначну“ алгебру неко аутохтоно подручје, овде попут куполе наднесено и без везе с њом, већ да обе области карактерише пуно прожимање, доказ је већ Лагранжово издвајање (дефиниција) изводне функције из „алгебарског“ облика Њутнове биномне формуле, као основне теореме рачуна. Наиме, ако је n природан број, та формула има коначан вид и гласи:

$$(x = h)^n = h^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} h^n;$$

[7]) Нав. дело, 139.

али је једнако у важности и следећа аналогија с њом — за p произвољно:

$$(x+h)^p = x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} h + \binom{p}{2} x^{p-2} h^2 + \cdots$$

У оба случаја, по Лангранжу, други чланови развоја на десној страни садрже функције — изводе, што је резултат дакако и на основу сваког другог правила и налажењу изводи. Другим речима, ако је $f(x) = x^p$, онда је *по дефиницији* $f'(x) = \binom{p}{1} x^{p-1}$, док се применом истог поступка налази и

$$\binom{p}{2} x^{p-2} = \frac{f''(x)}{2!}, \ldots, \binom{p}{n} x^{p-n} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}, \ldots$$

На овај начин, биномни развој за $(x+h)^p$ „прелази" у Тајлоров полином за функцију $f(x) = x^p$, јер је

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n + \cdots$$

У општијем смислу, за једну широку класу функција, Лагранжу ће поћи за руком да оправда овакву екстраполацију Њутнове биномне формуле у Тајлоров ред.

Да ли пак уопште постоји нешто што би се на маргинама Марксових рукописа могло разазнати и означити као његов „метод диференцирања функција" и у чему би се он састојао? У сваком случају, био би тај метод само део Марксовог разумевања диференцијалног рачуна, а оно је несумњиво, вишеструко сложено.

Уместо децидираног одговора на поменуто питање, изложимо радије неке незаобилазне карактеристике његовог приступа постојећим техникама диференцирања функција. Првенствено, ту се издваја Марксов сталан захтев за садржинском итерпретацијом постојећег математичког формализма, узнапредовалог у историском смислу до својеврсне самодовољности и осамостаљења. То је цео онај збир поступака, иначе високо легитимних у овој науци, одређиваних као аксиоматски, дедуктивни, алгоритамски, синтактички, који су додуше изнели на себи њен укупан развој, али је особито у кризним ситуацијама математичког мишљења, увек ваљало разоткрити њихово нужно емпиријско језгро, показати да су његове полазне предпоставке зачете у искуству. Један пак такав најдубљи увид, који би према оној најопштијој науци био дијалектички помогао би потом најразличитије видове борбе против мистицизма и замагљивања сваке врсте (којима је, као што смо навели, цитирајући Енгелса, област диференцијалног рачуна била пуна), потврдивши једновремено и моћ самог тог дијалектичког увида.

И више од тога: била је то Марксова потреба за још једним (дакако значајним) учинком победе материјализма над идеализмом — кад би се, као овде, потврдила превласт генетичког, конструктивног мишљења, над оперативним и формалистичким. Јер му је у области политичке економије (у теорији о радној вредности) већ било пошло за руком да то управо темељно оствари. Тамо ће критикујући категорију вредности, (иначе један квалитет), како је постављена у буржоаској теорији, односно њено „отуђење" у категорију квантитета = новца, које потом резултира целом серијом грађанском човеку непротумачених, „ирационалних" појмова и стања — попут фетиша робе, профита, трке за новцем и др., Маркс ће „природну датост" капиталистичког начина организације друштва, како полазну предпоставку ове теорије, сменити њеном историјском променљивошћу, која као што је познато израста на тако простој чињеници да човек да би се одржао мора да производи. То је „обрат њихова логичког поретка": кад једна историјска метода бива коригована, или допуњена до успостављања континуитета или дијалектичког јединства, генетичко структуралном методом[8]). А Марксов демарш у области диференцијалног рачуна, по своме односу према његовим творцима, био је у суштини исти. Ево дела његовог расуђивања с почетка изградње појма „функција — извод":

Ако имамо x које постаје x_1, тада је

$$\text{A)}\ x_1 - x = \Delta x;$$

одакле треба извући следеће conclusions закључке:

$$\text{Aa)}\ \Delta x = x_1 - x \qquad \text{a)}\ x_1 - \Delta x = x;$$

Δx, диференција између x_1 и x је, дакле, позитивно*) изражена, прираст од x; јер ако се поновно одузме од x_1 овај се враћа у своје првотно стање, у x;

Диференција се, дакле, може изразити на два начина: *непосредно, као диференција* између увећане варијабле и њена стања прије раста, и то је њезин *негативан израз*. и позитивно као инкримент [прираст] или декримент, као резултат: као прираст од x у стању прије раста, и то је њезин позитиван израз.

---

[8]) „Претварање вишка вредности у профит треба извршити из претварања стопе вишка вредности у профитну стопу, а не обратно" (Маркс: *Капитал*, т. III, стр. 18).

*) Ваља рећи: „негативно изражен", као што се види и ниже, при крају истог цитата.

Видјет ћемо какву улогу има то двоструко схватање у повијести диференцијалног рачуна.

$$[2)] \quad \text{b)} \; x_1 = x + \Delta x$$

x_1 је сâм повећано x, његов раст није одвојен од њега; x_1 је сасвим неодређен облик његова раста; тај облик разликује увећано x наиме x_1 од његова изворног облика прије раста, од x, но он не разликује x од самог његова прираста. Стога се однос између x_1 и x може изразити једино негативно, као диференција $x_1 - x$. Напротив, у

$$x_1 = x + \Delta x$$

је:

1) Диференција изражена позитивно, као прираст од x.

2) Стога његово увећање није изражено као *диференција,* већ као *сума* самог x у његову првотном стању + његова прираст[9]).

Да је текст овај, будући да је реч о белешкама, недовршен, то свакако стоји, али бисмо исто тако могли рећи да иде на руку својеврсној „епистемолошкој", или „феноменолошкој" страни Марксове анализе. Овде имамо у виду закључке под А), Аа), а) и др., који својом „таутологичношћу", као да имају за циљ управо то: да исцрпу феномен. Али ће својим *садржинским* разликовањем позитивног од негативног прираста, и предпостављањем другог првоме, Маркс наглашено желети да из односа променљивих излучи њихово *кретање,* разоткрије њихову *промену* и *прелаз.* Разумевање пак разлике као суме, та у Марксовим терминима „позитивно" изражена диференција, као „збир непроменљивих стања"[10]), исходиште је и Лајбница $(x + dx)$ *и* Њутна $(x + \tau x)$ и Даламбера $(x + \Delta x)$ и Лагранжа $(x + h)$.[11] Негативно изражена диференција (то јест, разлика $\Delta x = x_1 - x$) у основи рачуна, учинили би да овај, сматра Маркс, одиста буде „диференцијалан рачун"[12]). Ближе говорећи, биће то метод који ће се састојати у узастопном полагању и елиминацији

9) Mat. rukopisi, 129.

10) С. Јановская: О математических рукописах Карла Маркса, *Под знаменем марксизма,* Москва, 193?.

11) Као што је познато, шема диференцирања функција, рецимо по Лагранжу, садржи у себи

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{итд.}$$

12) У своме писму од 21 нов. 1882 год., Енгелс ће одати дужно признање овој црти Марксовог мишљења: „Главна разлика између твог и старог метода, састоји се у томе што ти узимаш x које прелази у x_1, које се дакле стварно мења, док други полазе од $x + h$, a to uvek pretstavlja само суму две величине, а не никако промену једне величине".

поменуте разлике, на следећи начин: једном, код функције рецимо $y = f(x)$, се узима да је $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ ($s\, x_1 \neq x$) једнако $F(x_1, x)$[13]), или пак F° (x_1, x) (ако је могуће кретање с x_1—x), други пут пак се ова различитост x_1 *и* x негира (стављањем $x_1 = x$), али се резултат F (x, x) *(или* F° (x, x) (ове негације *битно* разликује од тривијалне једнакости ($y_1 - y = f(x_1) - f(x)$, или $0 = 0$, која би се добила ако би се на самом почетку процеса x_1 изједначило с x. Јер, ово је вид двоструке, *продуктивне* уствари, дијалектичке негације (негације), која далеко од тога да се поистовети с полазном афирмацијом, сматра Маркс, превладавањем извесних њених елемената, рађа новом, *дотле непостојећом* функцијом — изводом $f'(x)$ $(F\,(x, x))$ дате функције. Штавише, у симболичкој ознаци dy/dx за нову функцију, сачуван је управо смисао овог дијалектичког (као реалног) процеса и избегнута бесмисленост количника $0/0$ ($= \Delta y\,/\,\Delta x = (y_1 - y)/$ $/(x_1 - x)$ — за $x_1 = x$ и $y_1 = y$), што лишава однос сваке мистике Сада чланови тог односа, симболи dy и dx, дозвољавају могућност алгебарских операција с њима и нису „хијероглифи" у плехановском смислу, нити пак „конвенције" у смислу Поенкареа. Али ће једновремено сачувати они и релативно самосталност своју и улогу означитеља, и то ће Марксу дати за право да између њих и реалних процеса не употреби математички знак „=")[14]). Уместо тога, он радије користи свезу „или". Тако би скица извода функције $f(x) = x^2$ била по Марксу:

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ или } \frac{x^2_1 - x^2}{x_1 - x} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{x_1 - x} = x_1 + x.$$

$x_1 + x$ је тзв. „првобитан извод" ове функције, јер је њен (стварни) извод (добија се за $x_1 = x$) $2x$. Ми га ту не срећемо у „готовом облику" (Лагранж), њега нам на *нужан* начин омогућава ова генетско-структурална метода итд.

Образложити (унутрашњу) нужност дефиниција у математици, ево још једног императива марксистичког наслеђа, тачно насупрот актуелне ситуације у овој науци, која у мери у којој је данас формализована, и онда када се не износи на стриктно формалан начин, редовно своје дефиниције излаже „одозго", записујући их непосредно као готово-створене, а да

---

13) Ознаку F (x_1, x), као и следећу F^0 (x_1, x), не користи Маркс; њу срећемо код Волфганга Ендемана (Wolfgang Endemann), писца предговора делу Matematički rukopisi.

14) За њих он налази изразе: „функција од x" (за леву страну) и „фунцкија у x" (за десну).

не пружи увид у *raison d'être* појмова које доноси, а једнако је то случај и с тврђењима њеним (теоремама) и доказима. Стога ће примедбе Карла Маркса на аксиоматски и оперативан, нехеуристички и неконструктиван, алгоритмички и синтактички карактер диференцијалног рачуна од Њутна до Лагранжа, бити његове примедбе на сваки математички садржај те врсте. Познато је пак да је управо код проблема надилажења парадокса у теорији скупова, теорији замишљеној да послужи као основа свеколикој математици, модерна математика у једном свом делу[15]), истакла снажан захтев за конструктивним поступцима у грађењу појмова, једнако као у њиховој употреби — насупрот заиста прешироког разумевања основних поставки теорије. Ова црта Марксовог мишљења, иако смо овде у прилици да је уочимо тек на примеру једног јединог појма којим се бавио он, наиме појма диференцирања функције, чини од овог мислиоца својеврсног претечу поменуте тенденције у математици овог столећа. У исто време пак, Марксов интерес за „изношењем" првичних појмова теорије и промишљањем (тумачењем) њених резултата у дијалектичким терминима, што би био захтев и за изградњом једне дијалектичке математике, још увек не доживљава неку систематскију елаборацију, мада многу совјетски аутори[16]) прихватају постојање нечег таквог, већ на основу извесних општих фраза. Но, у оној страни Марксове мисли коју смо горе (стр. 10) назвали „исцрпљивање феномена", ми видимо још једно могуће, плодно продужење, њено у сферу нарочите „епистемологије математике", какву је у своме делу *Математички идеалитети*[17]) изнео саврмени француски аутор Жан Десанти (Jean Desanti). Јер, ако иза Геделових (Gödel) резултата, и на основу њих, све аксиоматизације исказују суштинску немоћ да обухвате теорију скупова, то је засад још готово једина могућност конзистентног промишљана математичких ентитета и математичких творевина.

---

[15]) Реч је о становиштима интуиционизма, финитизма, конструктивизма и др., у тзв. „основима математике".

[16]) На пример, С. Јановская у поменутом раду.

[17]) Jean Toussaint Desanti: *Les idéalités mathématiques* (1968), Editions du Seuil, Paris.

Milan TASICH

KARL MARX'S „MATHEMATICAL WRITINGS"

Summary

The author analyses a problem related to mathematical analysis on the basis of notes taken from the books read by Marx. The differential and integral calculation based on an „endless analysis" showed that for more than two centuries msticism never ceased to exist as a source and it assisted the prevalence of idealistic over the materialistic view of the world. Therefore, Marx's idea on the concept of the „Derivative of the Function" was dialectic genetic, and semantic, which was the antithesis of the formal, operative, axiomatic method of thought in mathematics. In the so called Lagrandge Proof of Taylor's formula based on algebra Marx found a mehtod of dialectical transfer of a science of finity (algebra) into a science of infinity (analysis). It is argued whether Marx can be considered either as a predecessor of an epistomology, or of a phenomenology of mathematics.